Vektoranalysis

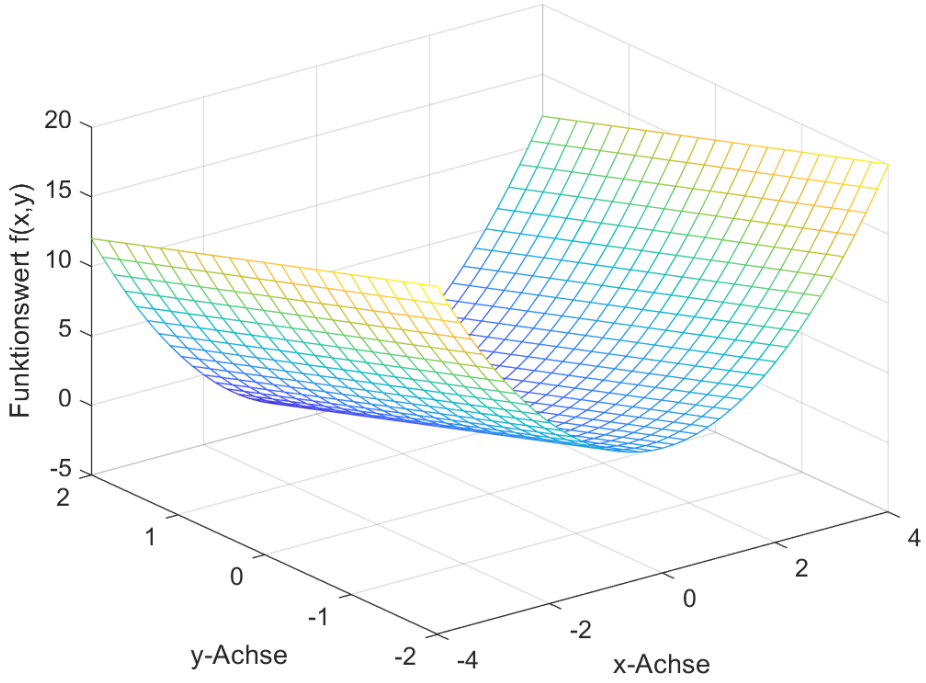
Einführung und Wiederholung

Vektoranalysis

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

Ableitungen für Skalarfelder?

Wir interessieren uns für die Steigung des Skalarfeldes…

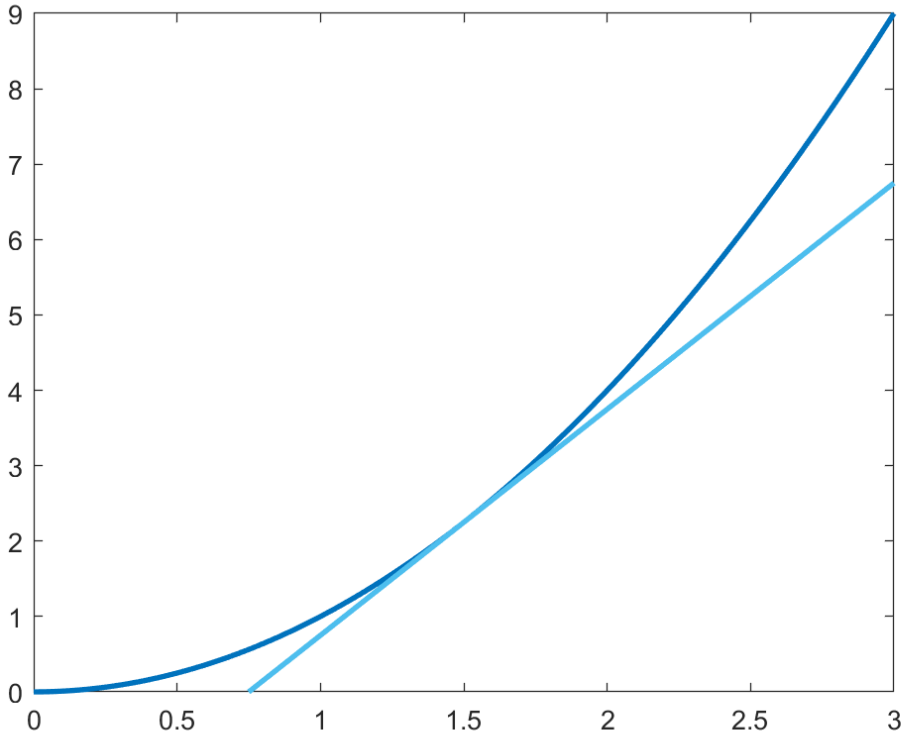


Vektoranalysis

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

Ableitung von 1D Funktionen...

Wir betrachten die folgende Funktion…



$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Woher kommt die Formel?

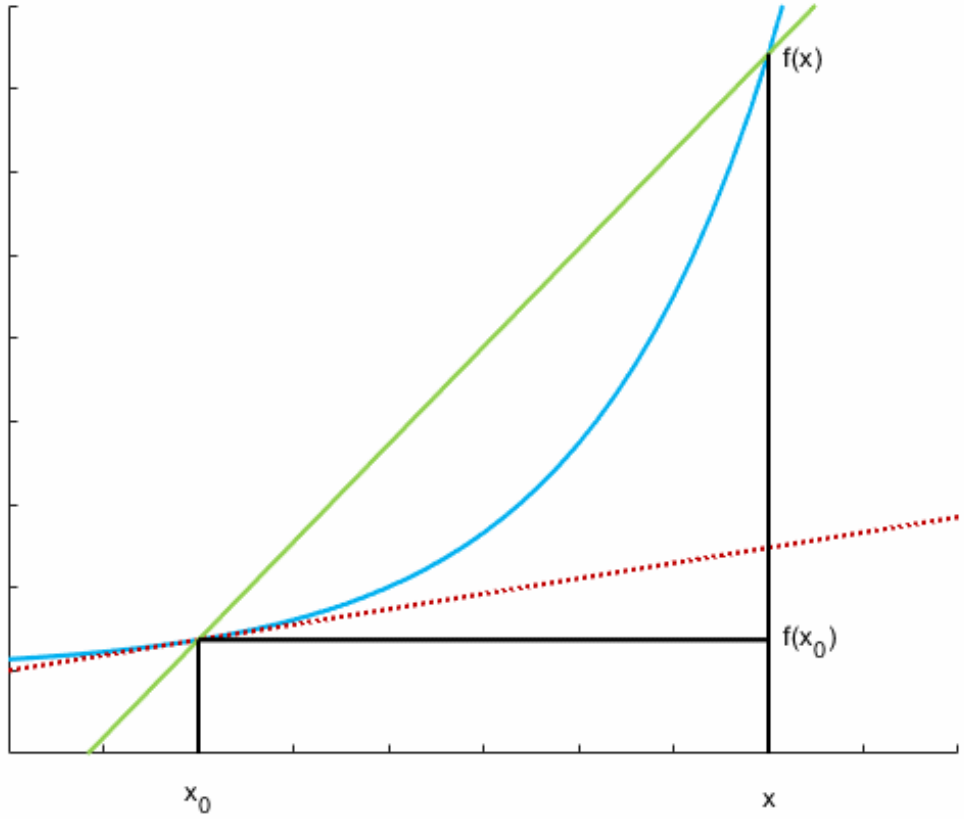
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Vektoranalysis

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

Veranschaulichung des Differentialquitienten

Wir schauen uns den Grenzwertprozess in einer Animation an…



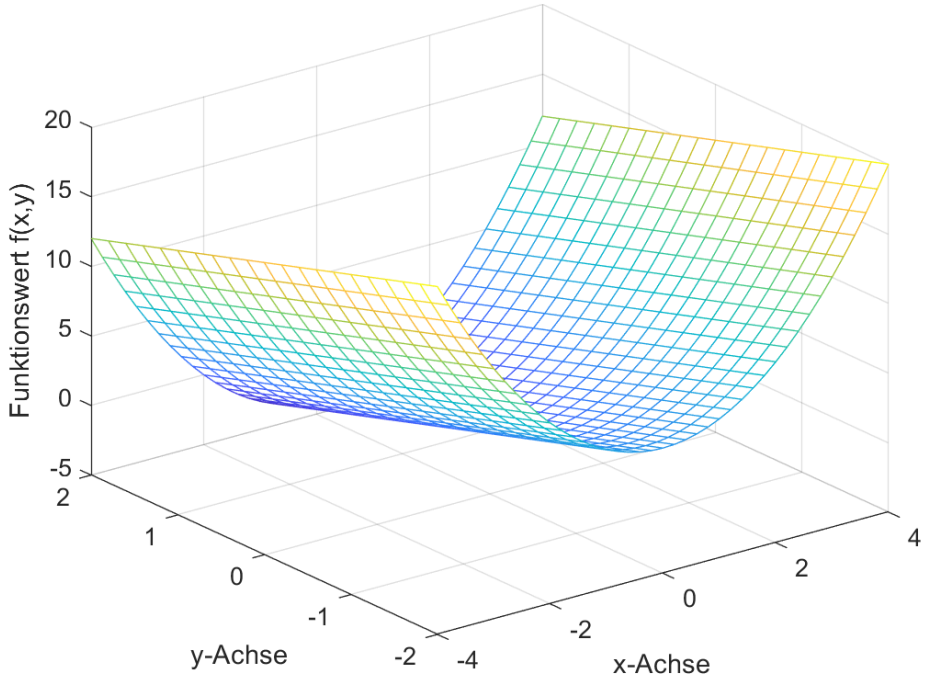
Ableitung:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

Wie können wir die Steigung von Skalarfeldern bestimmen?

Wir betrachten das folgende Skalarfeld…



$$f(x,y) = x^2 - 2y$$

Partielle Ableitungen:

Parabel: $2x$? Gerade: -2?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = -2$$

Woher kommen die Formeln?

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wie lauten die partiellen Ableitungen?

$$f(x,y) = 2x^3 + 2xy^2 \Rightarrow \partial_x f = 6x^2 + 2y^2$$

$$\Rightarrow \partial_y f = 4xy$$

$$f(x,y) = \sin x \cdot \cos y \Rightarrow \partial_x f = \cos x \cdot \cos y$$

$$\Rightarrow \partial_y f = -\sin x \cdot \sin y$$

Vektoranalysis

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

Woher kommt die Formel?

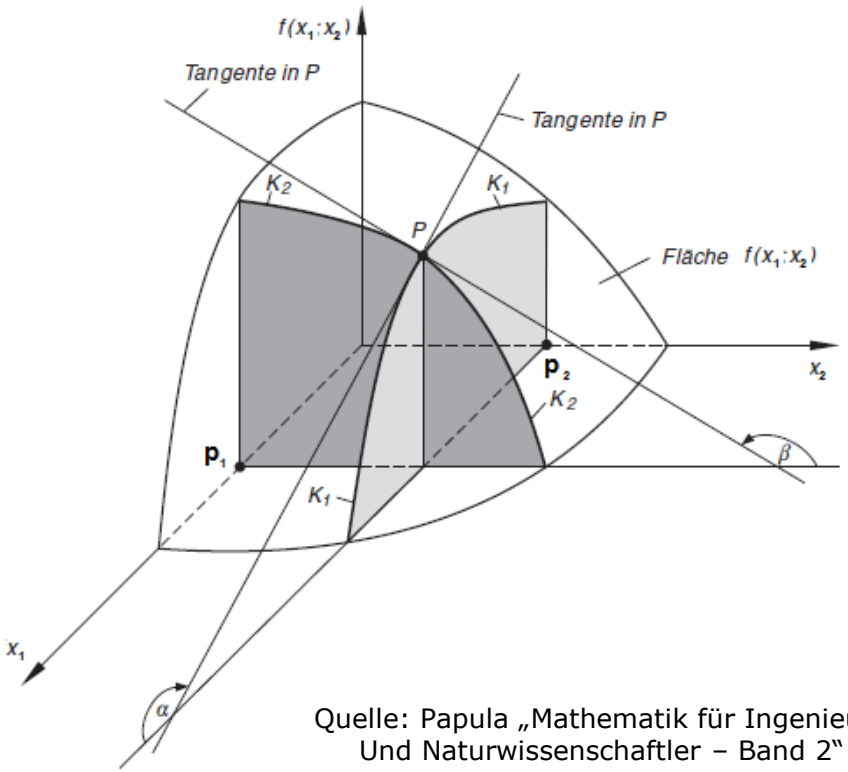
Wir wenden die Definition der Ableitung für 1d Funktionen auf eine Koordinate des Skalarfeldes an…

Wir wollen die Steigung in x_1 Richtung im Punkt $P = (p_1, p_2)$ des Skalarfeldes $f(x_1, x_2)$ bestimmen, d.h. die partielle Ableitung ausrechnen…

Wir fixieren $x_2 = p_2$ und ändern nur die x_1-Richtung, d.h. der Funktionswert ändert sich entlang der Kurve K_1…

Differentialquotient:

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(p_1 + \Delta x_1, p_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_1}$$



Quelle: Papula „Mathematik für Ingenieure Und Naturwissenschaftler – Band 2"

Änderungsverhalten von Skalar- und Vektorfeldern

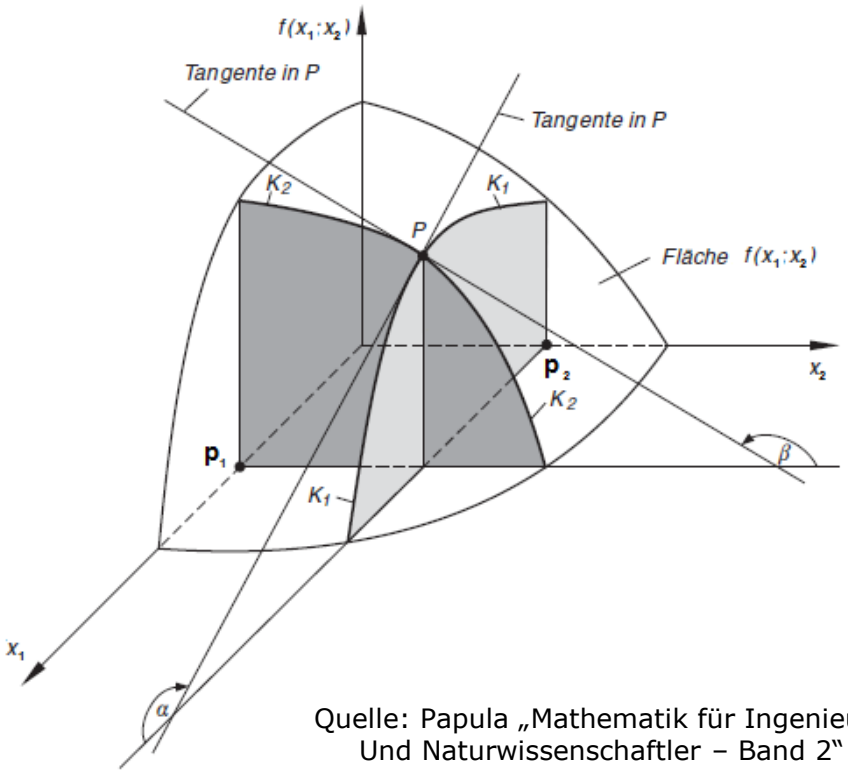
Woher kommt die Formel?

Die partielle Ableitung in x_2-Richtung erhalten wir analog:

Wir fixieren $x_1 = p_1$ und ändern nur die x_2-Richtung, d.h. der Funktionswert ändert sich entlang der Kurve K_2…

Differentialquotient:

$$\partial_{x_2} f(p) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + \Delta x_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_2}$$



Quelle: Papula „Mathematik für Ingenieure Und Naturwissenschaftler – Band 2"

Partielle Ableitungen

Existieren die Grenzwerte im Punkt $P = (p_1, p_2)$, so ist das Skalarfeld f dort partiell differenzierbar und wir schreiben:

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(p_1 + \Delta x_1, p_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_1}$$

$$\partial_{x_2} f(p) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + \Delta x_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_2}$$

Bemerkung:

Bei der partiellen Ableitung bzgl. einer Koordinate handelt es sich um eine „normale" 1d Ableitung, bei der alle anderen Koordinaten als Konstanten betrachtet werden.

Partielle Ableitungen von Vektorfeldern

Vektorfelder können völlig analog partiell bzgl. einer Koordinaten abgeleitet werden.

Beispiel:

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitung der zweiten Komponente bzgl. x_1…



$$\partial_{x_1} F_2 = x_2$$

Der Gradient

"Ausrechnen" des Gradienten:

Rein formal bilden wir den Gradienten, indem wir alle partiellen Ableitungen berechnen und diese in einem Vektor zusammenfassen…

$$\text{grad}\, f(x_1, x_2, x_3) = \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3} f \end{pmatrix}$$

Der Gradient

Sie sind an der Reihe…

Bestimmen Sie den Gradienten des folgenden Skalarfeldes:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3 - x_2 + x_3^3$$



$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_3 \\ -1 \\ x_1^2 + 3x_3^2 \end{pmatrix}$$

Vektoranalysis

Der Gradient

Wozu brauche wir den Gradienten?

Vektoranalysis

Der Gradient

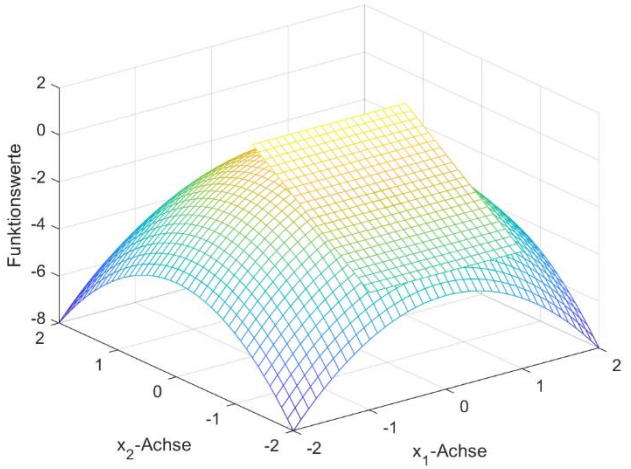
Wozu brauche wir den Gradienten?

Wir kennen bereits mehrere Anwendungen…

Extrema bestimmen: $\nabla f = 0$ ⟺ kritische Punkte

Approximation durch Tangentialebene:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{p}) + \nabla f(\vec{p})^T \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$



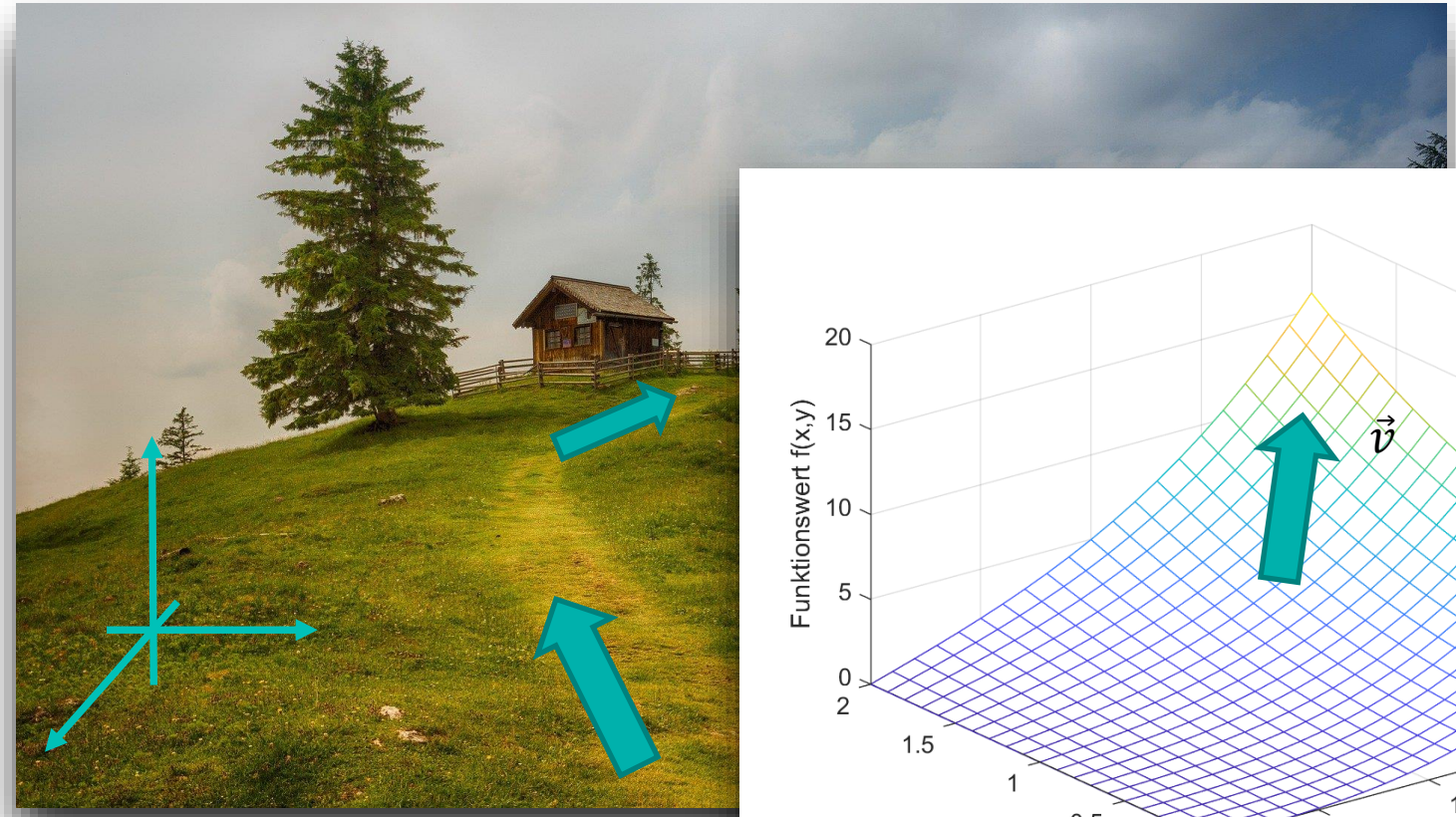
Richtungsableitung:

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{p}) = \vec{v}_0 \cdot \nabla f(\vec{p})$$

Vektoranalysis

Richtungsableitung

Wie bestimmen wir die Steigung in eine beliebige Richtung?



Richtungsableitung

Die Richtungsableitung...

Wir betrachten d

$$\begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Woher kommt die Formel?

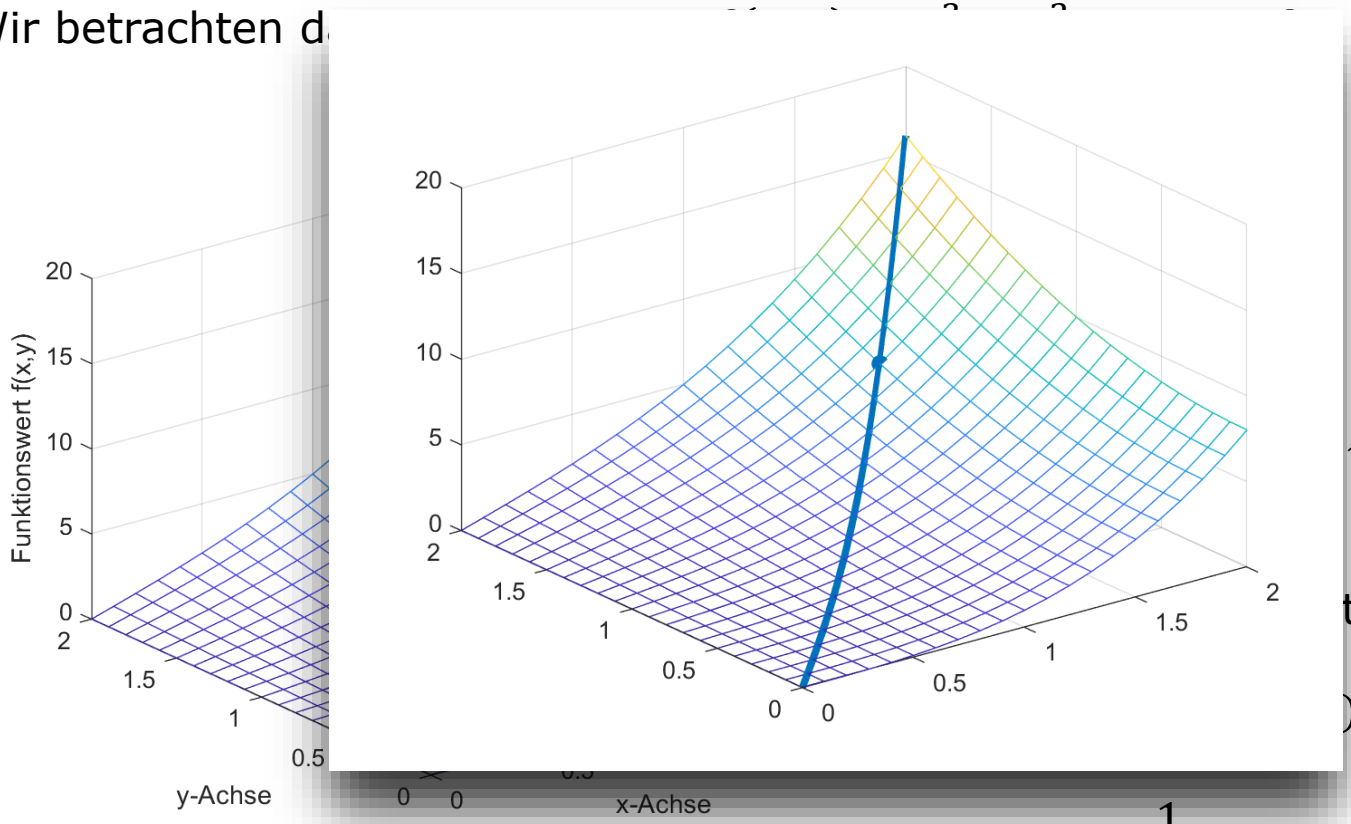
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tung:

$$) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 11.25 \\ 2.25 \end{pmatrix} \approx 9.55$$



Richtungsableitung

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie die Richtungsableitung:

$$f(x,y) = x^2 + x^3 y \qquad \text{Richtung:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Punkt:} \quad P = (2,1)$$

Normierung: $\vec{v}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 2x + 3x^2 y \\ x^3 \end{pmatrix}$

Richtungsableitung:

$$\vec{v}_0 \cdot \nabla f(2,1) = \frac{1}{5}(3 \;\; 4) \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} \approx 16$$